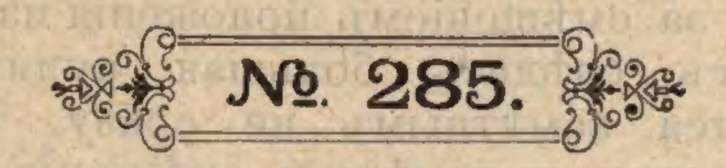
XXIV Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.



№ 285.

О маятникѣ Фуко.

Проф. Н. Пильчикова въ Одессѣ.

Когда флорентинскіе академики наблюдали около 1660 года отступленіе плоскости качанія маятника, они не могли найти причины открытаго ими интереснаго явленія; оно оставалось загадочнымъ почти два столѣтія. Въ 1851 г. Фуко, которому открытіе флорентинскихъ академиковъ было неизвѣстно, сдѣлалъ свой знаменитый опытъ съ длиннымъ маятникомъ (67 метровъ) подвѣшеннымъ на проволокѣ въ Парижѣ въ Пантеонѣ. Маятникъ при каждомъ своемъ качаніи (16,42 секунды), срѣзывалъ маленькую часть (около 2,3^{mm}) влажнаго песочнаго валика (насыпаннаго на кругъ діаметр. въ 6 метровъ). Такимъ образомъ Фуко вновь открылъ явленіе кажущагося отступленія плоскости качанія маятника; онъ первый указалъ на вращеніе земли вокругъ своей оси, какъ на причину этого явленія.

Лѣтомъ этого года въ отчетахъ Парижской Академіи Наукъ была напечатана статья проф. Берже: „Доказательство вращенія земли при помощи опыта Фуко съ маятникомъ длиною въ одинъ метръ *). Проф. Берже пишетъ, что разсматривая въ микроскопъ

*) C. R. 9 Juillet 1900 p. 106.

остріе стержня метроваго маятника, подвѣшеннаго на кардановской подвѣскѣ, можно замѣтить его смѣщеніе относительно креста паутинныхъ нитей въ окулярѣ микроскопа уже при второмъ качаніи маятника. Для объективной демонстраціи явленія маятникъ освѣщается сильнымъ источникомъ свѣта и проэктируется системою линзъ на болѣе или менѣе удаленный экранъ, на которомъ дѣлаютъ мѣтки для сужденія о перемѣщеніи увеличеннаго обратнаго изображенія конца маятника. При такой постановкѣ опыта за смѣщеніемъ положенія изображенія маятника на экранѣ можетъ слѣдить большая аудиторія, однако это смѣщеніе становится замѣтнымъ не сразу. Когда я подходилъ къ экрану, мнѣ удавалось замѣтить смѣщеніе изображеній маятника Берже (въ Парижѣ въ Сорбоннѣ) черезъ минуту или полторы, когда я помѣщался подальше, на срединѣ физической аудиторіи Сорбонны—требовалось минуты три.

Проф. Берже показалъ опытъ Фуко со своимъ метровымъ маятникомъ въ одномъ изъ засѣданій конгресса физиковъ въ Парижѣ. Мнѣ, какъ и другимъ присутствующимъ, удалось замѣтить смѣщеніе изображеній маятника минуты въ двѣ—три.

Прежде чѣмъ привесть простой разсчетъ, позволяющій судить о томъ, какъ скоро можетъ быть замѣчено кажущееся отступленіе плоскости качаній маятника и описать его опыты, я считаю умѣстнымъ напомнить о нѣсколькихъ важныхъ работахъ съ маятникомъ, предшествовавшихъ работѣ проф. Берже.

Уже въ слѣдующемъ за опытами Фуко 1852-мъ году д-ръ Гарте *) повѣсилъ на кардановской подвѣскѣ маятникъ длиною въ 50 метровъ въ Кёльнскомъ соборѣ. Время качаній маятника было около 13,5 сек.; конецъ маятника при каждомъ качаніи перемѣщался на 3^{mm} по окружности большаго круга, находившагося подъ маятникомъ. Пять серій наблюденій (отъ 24 мая по 14 іюня), обставленныхъ крайне тщательно, доставили весьма согласныя числа для величины времени, въ теченіе котораго плоскость качаній маятника поворачивалась на 1^0: въ 1-ой серіи получились числа отъ $5^m7^s,6$ до $5^m10^s,4$; во 2-ой отъ $5^m6^s,2$ до 5^m10^s; въ 3-ей отъ $5^m8^s,4$ до $5^m11^s,4$; въ 4-ой отъ $5^m7^s,8$ до $5^m11^s,4$; въ 5-ой отъ $5^m4^s,6$ до $5^m10^s,6$. Среднее изъ 36 опытовъ дало $5^m8^s,75$ (съ вѣроятной ошибкой менѣе полусекунды), а вычисленіе по формулѣ: часовое вращеніе плоскости качаній маятника въ данномъ мѣстѣ равно часовому вращенію плоск. качаній маятн. на полюсѣ (т. е. 15^0) помноженному на синусъ широты даннаго мѣста, должно было доставить $5^m8^s,23$. Дѣлая разсчетъ на часовое вращеніе плоскости качаній маятника получимъ: наблюд.: $11^0 38' 30'',9$; вычисл.: $11^0 38' 50'',3$. Это весьма замѣчательное согласіе опытовъ Гарте свидѣтельствуетъ о необыкновенномъ

*) D-r Garthe, Foucault's Versuch als directer Beweis der Axendrehung der Erde, Cöln, 1852.

вниманіи ко всѣмъ деталямъ устройства маятника и его установки, вниманіи, которое послѣдующіе наблюдатели, какъ увидимъ ниже, уже рѣдко удѣляли этимъ деталямъ.

Въ слѣдующемъ 1853 г. вопросъ о маятникѣ привлекъ къ себѣ вниманіе, къ сожалѣнію не надолго, глубокаго математика Гаусса. Въ письмѣ къ Гумбольдту (10 мая 1853 г.) Гауссъ говоритъ о томъ, что онъ считаетъ возможнымъ построить маятникъ обыкновенныхъ, такъ сказать, лабораторныхъ размѣровъ, подвѣшенный на кардановской подвѣскѣ, который давалъ бы возможность наблюдать вращеніе плоскости своихъ качаній. Мнѣ неудалось розыскать никакихъ указаній на то, былъ ли когда либо испробованъ на дѣлѣ Гауссомъ его маятникъ. До 1879 г., когда появилось въ Голландіи замѣчательное изслѣдованіе Оннеса о маятникѣ въ 1,2 метра длины, часовое вращеніе плоскости качаній маятника опредѣлялось изъ наблюденій надъ длинными маятниками. Большое количество подобныхъ наблюденій, выполненныхъ въ разныхъ частяхъ свѣта, доставило, конечно, вездѣ результаты согласные съ вычисленными величинами часового вращенія плоскости качаній маятника, но эти позднѣйшія наблюденія не могутъ сравняться въ точности съ классическими Кёльнскими наблюденіями д-ра Гарте. Приведемъ нѣсколько примѣровъ. Джерардъ въ Абердинѣ (широта 57°9′) даетъ 12°,7; должно быть 12°,6; Дюфуръ въ Женевѣ (широта 46°12′) даетъ 11°,18; д. б. 10°,86; д'Оливейра въ Ріо-де-Жанейро (широта 22°54′) даетъ 5°,17; д. б. 5°,83; Лампре и Шау на Цейлонѣ (подъ широтою въ 6°56′) даютъ 1°,87, д. б. 1°,81 и т. д.

Въ 1879 г. д-ръ Камерлингъ Оннесъ *) устроилъ маятникъ въ 1,2 метра на кардановской подвѣскѣ (нѣсколько измѣненной). Маятникъ былъ заключенъ въ сосудъ (имѣвшій форму усѣченнаго конуса) закрытый герметически и имѣющій боковую трубку для сообщенія съ насосомъ, служившимъ для выкачиванія воздуха; такимъ образомъ маятникъ качался въ разрѣженномъ воздухѣ и вслѣдствіе уменьшеннаго сопротивленія воздуха получалась возможность слѣдить за колебаніями маятника въ продолженіе долгаго времени, при чемъ амплитуды колебаній убывали очень медленно. Особая оптическая установка служила для опредѣленія измѣненія плоскости качаній. Многочисленные опыты, сдѣланные др. Оннесомъ въ подземельѣ Гронингской Лабораторіи доставили для величины часоваго вращенія числа, заключающіяся въ предѣлахъ отъ 11°,2 до 12°,8. Нельзя, конечно, признать подобное малое согласіе результатовъ отдѣльныхъ опытовъ вполнѣ удовлетворительными, но возможность опредѣленія часового вращенія плоскости качаній короткаго маятника была др. Оннесомъ вполнѣ установлена. Новымъ работамъ въ этомъ направленіи предстояло выяснить вліяніе различныхъ условій на движеніе маятника и вы-

---

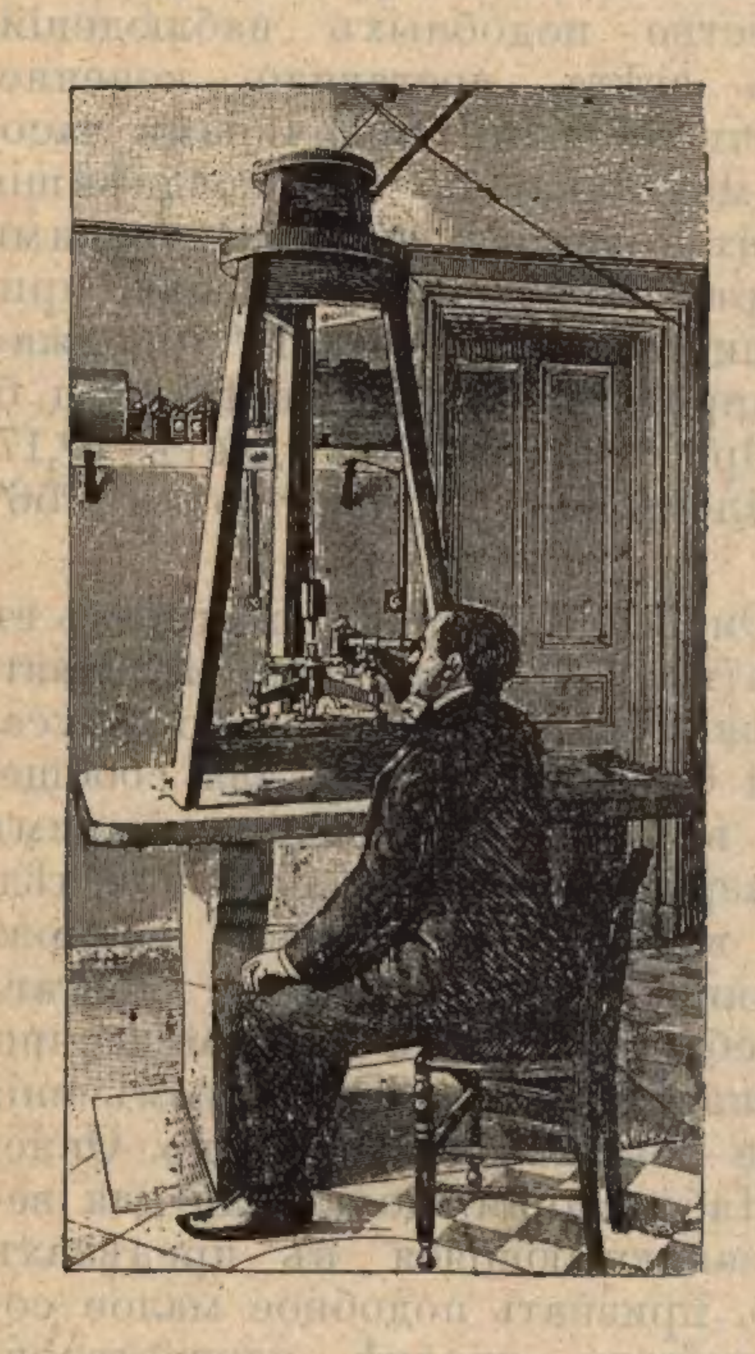
*) D-r Kamerlingh Onnes. Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde, Groningue, 1879.

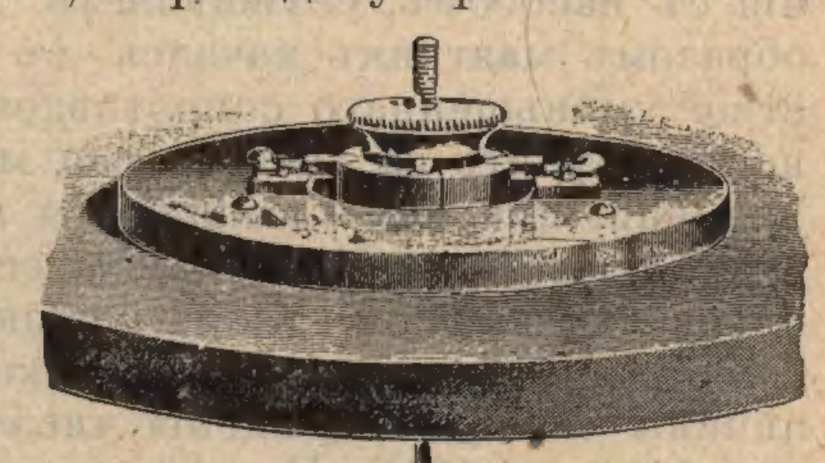
работать такую конструкцію подвѣски маятника и прочихъ его частей, при которой различныя систематическія погрѣшности были бы устранены, а вліяніе случайныхъ погрѣшностей было бы доведено до minimum'a.

Теоретической разработкой законовъ движенія маятника на кардановской подвѣскѣ занялся въ 1886 году Лорентценъ*). Его анализъ не привелъ, однако, ни къ какимъ точнымъ указаніямъ на наилучшую контсрукцію маятника и его подвѣски.

Практическимъ разрѣшеніемъ вопроса объ устройствѣ короткаго маятника на кардановской подвѣскѣ, дающаго возможность точнаго измѣренія часового вращенія плоскости его качаній занялся какъ указано выше, проф. Берже.

Изъ прилагаемыхъ рисунковъ видно общее устройство маятника проф. Берже и детали употребленной имъ кардановской подвѣски. „Я взялъ — говоритъ проф. Берже въ своей статьѣ— маятникъ длиною въ одинъ метръ, состоящій изъ бронзоваго цилиндрическаго стержня, утонченнаго съ обоихъ концовъ и изъ мѣдной цилиндрической массы въ 2 килограмма; двѣ гайки позволяютъ закрѣплять эту массу на любой высотѣ на нижней утонченной части стержня. Въ верхней части находится подвѣсъ на манеръ кардановскаго, состоящій изъ 2 маленькихъ колецъ, снабженныхъ стальными ножами, перпендикулярными относи-





тельно другъ друга. Продолженіе ихъ встрѣчается въ одной и той же точкѣ, находящейся на самой оси бронзоваго стержня. Эта часть инструмента, требующая въ высшей степени точнаго выполненія (la plus délicate de beaucoup), исполнена г.г. Шато (Château)". Изъ разсмотрѣнія рисунковъ можно убѣдиться, что опи-

*) G. Lorentzen. Theorie des Gaussichen Pendeln. Astronomische Nachrichten № 2728.

саніе подвѣски, даваемое проф. Берже не вполнѣ точно: лезвія ножей (перпендикулярныхъ относительно другъ друга) пересѣкаются не въ одной точкѣ, а въ двухъ точкахъ, лежащихъ одна надъ другой (на оси стержня); такимъ образомъ маятникъ, устроенный проф. Берже, имѣетъ не одну, а двѣ длины, а потому конецъ его стержня описываетъ, очевидно, одну изъ фигуръ Лиссажу (а не эллипсисъ, описываемый маятникомъ Фуко). Проф. Берже не сообщаетъ, къ сожалѣнію, данныхъ доставляемыхъ отдѣльными наблюденіями надъ качаніями его маятника, онъ говоритъ лишь слѣдующее: „я сдѣлалъ 50 опредѣленій, которыя даютъ для времени вращенія плоскости качаній маятника на 1^0 величину въ 6^m5^s—число чрезвычайно близкое къ тому, которое дается формулою (упомянутой на стр. 195).

Въ одномъ изъ слѣдующихъ №№ „Вѣстника“ я опишу пріемы и приборы служащіе въ основанной этой осенью Измѣрительной Физической Лабораторіи И. Новороссійскаго Университета для измѣренія часоваго вращенія плоскости качанія маятника и приведу описаніе простой подвѣски существенно отличающейся отъ кардановской. Тамъ же опишу очень простой и удобный способъ проэктировать вращеніе плоскости качаній маятника, употребленный, г. Попечителемъ Оренбургскаго Учебнаго Округа К. Чеховичемъ на читанной имъ публичной лекціи 20-го февраля 1896 г. въ Оренбургѣ. *)

Законъ независимости дѣйствія силъ и законъ относительнаго движенія.

Б. Герна въ Смоленскѣ.

Первый законъ утверждаетъ, что „когда какія-либо силы дѣйствуютъ на тѣло, то, было-ли тѣло первоначально въ покоѣ, или двигалось съ любой скоростью по любому направленію, каждая сила производитъ точно такое-же измѣненіе въ движеніи тѣла, какое она произвела-бы, еслибы дѣйствовала одна на то-же тѣло, бывшее первоначально въ покоѣ“. (W. Thomson. Tr. on. nat. phyl.). Намъ кажется, что всего опредѣленнѣе можно представить себѣ измѣненіе движенія, производимое данной силой, если вообразить систему, которая имѣла бы такое-же движеніе, какое имѣло бы и данное тѣло, если бы данная сила на него не дѣйствовала. Тогда относительнымъ движеніемъ тѣла по отношенію къ такой системѣ и будетъ выражаться дѣйствіе одной данной силы. Приведенный законъ говоритъ, что это относительное движеніе будетъ точно

---

*) Опытъ объясненія зависимости земнаго магнитизма и атмосфернаго электричества отъ дѣятельности солнца.

такое-же, какое эта сила произвела бы, если бы дѣйствовала одна на тѣло, бывшее раньше въ покоѣ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ наиболѣе точному выраженію закона относительнаго движенія: *относительное движеніе подъ дѣйствіемъ какой либо силы не зависитъ ни отъ состоянія покоя, или движенія всей системы, ни отъ дѣйствія на нее другихъ силъ.* При этомъ относительное движеніе подъ дѣйствіемъ данной силы слѣдуетъ опредѣлить, какъ движеніе относительно системы, которая движется такъ-же, какъ двигалось бы данное тѣло, если бы данная сила на него не дѣйствовала. Очевидно, движеніе всей системы можетъ быть какое угодно, потому что оно, какъ уже сказано, должно быть такое-же, какое имѣло-бы данное тѣло, если-бы на него дѣйствовали всѣ другія силы, кромѣ данной. Ограничить какъ нибудь движеніе, которое должна имѣть вся система, значитъ сдѣлать законъ относительнаго движенія неравносильнымъ закону независимости дѣйствія силъ. А такія ограниченія вводятся всѣми извѣстными намъ наиболѣе распространенными учебниками физики и объяснительной запиской къ программѣ физики для гимназій и реальныхъ училищъ. Объяснительная записка при этомъ ни объясняетъ, для чего дѣлается это ограниченіе; она говоритъ: „изъ этого закона вытекаетъ, какъ слѣдствіе, что, если совокупность нѣсколькихъ тѣлъ имѣетъ общее *равномѣрное и прямолинейное движеніе* и на одно изъ этихъ тѣлъ начинаетъ дѣйствовать сила....“ Это ограниченіе равносильно тому, какъ если-бы мы въ законѣ независимости дѣйствія силъ утверждали только независимость дѣйствія данной силы отъ пріобрѣтенной скорости, но не отъ дѣйствія другихъ силъ. Неправильное съ научной точки зрѣнія, оно не оправдывается и съ точки зрѣнія дидактической. Можно, и мы думаемъ, должно ограничить въ элементарномъ курсѣ выраженіе закона, если онъ можетъ быть доказанъ только въ нѣкоторомъ ограниченномъ объемѣ и если примѣненіе его не выходитъ изъ этого объема. Ни того, ни другого условія нѣтъ на лицо. Законъ этотъ такъ-же мало можетъ быть доказанъ съ этимъ ограниченіемъ, какъ и безъ него. Бросаніе камня съ вершины мачты—не научный опытъ, прыжки къ кормѣ и къ носу тоже не опыты, способные доказать законъ. Мы не отрицаемъ совершенно возможности придумать какое-либо приспособленіе, которое болѣе или менѣе грубо оправдывало бы этотъ законъ, но утверждаемъ, что не труднѣе придумать такія приспособленія для оправданія закона въ общемъ видѣ, чѣмъ съ ограниченіемъ. Укажемъ два примѣра. 1. Пустимъ падать два гладкихъ металлическихъ шарика съ одинаковой высоты и одновременно. Пусть одинъ изъ нихъ пролетаетъ мимо вертикальной площадки, которая можетъ быть приведена въ горизонтальное движеніе. Когда шарикъ будетъ пролетать мимо площадки, ударимъ его площадкой. Онъ получитъ относительно другого шарика движеніе по горизонтальной прямой въ сторону удара. Это можно будетъ видѣть изъ того, что онъ упадетъ одновременно съ другимъ и по направленію удара. Вотъ примѣненіе закона къ равноускоренному движенію системы.

А вотъ примѣненіе къ случаю системъ въ равномѣрномъ вращательномъ движеніи. Вообразите гладкій вертикально стоящій цилиндръ, могущій вращаться на своей оси. На его поверхности гладкое внутри, тяжелое и довольно широкое кольцо, которое поддерживается у верхняго края цилиндра, положимъ, ниткой. На кольцѣ и цилиндрѣ пусть будутъ мѣтки, и кольцо помѣщено такъ, чтобы мѣтки были одна противъ другой. Приведите цилиндръ во вращеніе и быстро перерѣжьте, или пережгите нитку: кольцо упадетъ до низу цилиндра, гдѣ должно задержаться на выступѣ, и мѣтки будутъ одна надъ другой. Разумѣется, можно возражать противъ точности этихъ опытовъ, но мы нигдѣ не читали описанія опытовъ, которые съ большею точностью оправдывали бы ограниченный законъ.

Вообще намъ кажется, что на этотъ законъ, какъ и на законъ инерціи, слѣдуетъ смотрѣть, какъ на гипотезу, оправдываемую всѣми выводами изъ нея, а на приводимые примѣры только, какъ на поясненіе его смысла.

Но, быть можетъ, возразятъ, что нѣкоторыя примѣненія этого закона могутъ вызвать недоразумѣнія. Почему, напр., въ примѣрѣ паденія камня съ вершины мачты требуется равномѣрное движеніе корабля и почему относительно качающагося корабля камень падаетъ не такъ, какъ если бы корабль былъ въ покоѣ? Но не трудно, при приведенномъ нами точномъ выраженіи закона, объяснить что камень, отдѣленный отъ мачты, помимо дѣйствія на него силы тяжести и какихъ либо другихъ силъ, можетъ составлять неизмѣняемую систему только съ равномѣрно движущимся кораблемъ, а движеніе его относительно качающагося корабля представляетъ совокупное дѣйствіе силы тяжести на камень и волнъ на корабль, которыя на камень не дѣйствуютъ. Точно такъ же одинъ ученикъ, по поводу доказательства вращенія земли, возразилъ намъ, что, по закону относительнаго движенія, тѣло должно падать такъ, какъ если-бы земля была въ покоѣ, т. е. къ центру, а не уклоняться въ сторону вращенія земли. На это не трудно замѣтить, что, помимо дѣйствія тяжести, камень не составляетъ неизмѣняемой системы съ вращающейся землей: онъ полетѣлъ бы по касательной къ параллели той точки, на которой лежитъ, и слѣдовательно составляетъ неизмѣняемую систему съ тѣломъ, которое можно вообразить движущимся по этой касательной со скоростью, которую имѣетъ данная точка земной поверхности. Относительно такого тѣла камень будетъ двигаться такъ же, какъ если бы вся система была въ покоѣ. Такимъ образомъ, эти недоразумѣнія, какъ и всякія другія, могутъ послужить только къ болѣе полному выясненію закона.

Чтобы показать, что примѣненіе этого закона въ элементарномъ курсѣ не ограничивается случаемъ равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія системы, укажемъ на пропорціональность между силами и ускореніями, или сообщаемыми скоростями и на параллелограммъ силъ. Въ статьѣ, помѣщенной въ „Вѣстникѣ

Оп. Физ. и Элем. Мат.“ за 1895 годъ, мы показали, какъ эти законы можно вывести изъ закона относительнаго движенія. Примѣненіе этого доказательства въ теченіе 4—5 лѣтъ убѣдило насъ, что оно совершенно посильно для учениковъ 6-го класса, не говоря уже объ ученикахъ 8-го.

Такимъ образомъ мы не находимъ никакого оправданія для принятаго ограниченія закона относительнаго движенія.

О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости.

С. Шатуновскаго въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

§ 10. **Обобщеніе предыдущаго случая.** Разсужденія, изложенныя въ предыдущемъ параграфѣ, не требуютъ, чтобы каждая изъ функцій k_1 и k_2 была симметрична относительно буквъ b и c: достаточно, чтобы отношеніе $k_1 : k_2$ было симметрично относительно этихъ буквъ. Это будетъ, напримѣръ, имѣть мѣсто, когда каждая изъ функцій k_1 и k_2 мѣняетъ знакъ отъ перемѣщенія буквъ b и c или если при этой транспозиціи буквъ b и c функціи k_1 и k_2 переходятъ соотвѣтственно въ $\frac{1}{k_2}$ и $\frac{1}{k_1}$. Такимъ образомъ устанавливаемъ слѣдующее

Правило третье. Если данъ одинъ уголъ A треугольника и величины двухъ однородныхъ функцій k_1 и k_2 отъ его линейныхъ элементовъ, причемъ $k_1 : k_2$ есть функція симметричная относительно буквъ b и c, то, вмѣсто угловъ B и C, слѣдуетъ искать величину одного изъ выраженій

$$\cos\frac{B-C}{2p},\ \sin\frac{B}{2p}\sin\frac{C}{2p},\ \cos\frac{B}{p}\cos\frac{C}{p}\ \text{и т. п.,}$$

гдѣ p прилично выбранная постоянная. Предпочтительнѣе искать $\cos\frac{B-C}{2p}$, причемъ p вообще равно наименьшему кратному всѣхъ чиселъ, на которыя дѣлится уголъ B въ уравненіи $f = k_1 : k_2$. Въ частныхъ случаяхъ выгодно брать p равнымъ дѣлителю этого наименьшаго кратнаго.

---

*) См. № 284 „Вѣстника“. Въ текстѣ статьи, напечатанной въ № 284 допущены слѣдующіе опечатки: на стр. 178 въ 7-й стрк. сн. вмѣсто A должно быть C, на стр. 185 въ 3-ей стрк. сн. должно быть 2 вмѣсто 8; на стр. 186 въ стрк. 14-й должно быть въ знаменателѣ $(h'_b + h'_c)^2$ вмѣсто $(h'_b + h'_c)$.

Примѣръ.

Даны A, l_b-l_c и h_b-h_c. Ищутся углы B и C. Такъ какъ отношеніе $(l_b-l_c):(h_b-h_c)$ симметрично относительно b и c, то предыдущее правило примѣнимо. Имѣемъ, на основаніи § 3 и теоремы § 4,

$$\frac{l_b-l_c}{h_b-h_c}=\left[\frac{\sin C}{\cos\frac{A-C}{2}}-\frac{\sin B}{\cos\frac{A-B}{2}}\right]:(\sin C-\sin B),$$

а потому полагаемъ

$$\frac{B-C}{4}=x.$$

Изъ этого равенства и равенства $B+C=180^0-A$ находимъ

$$B=90^0-\left(\frac{A}{2}-2x\right);\ \frac{A-B}{2}=\frac{3A}{4}-45^0-x;$$

$$C=90^0-\left(\frac{A}{2}+2x\right);\ \frac{A-C}{2}=\frac{3A}{4}-45^0+x.$$

Полагая для краткости $\frac{A}{2}=\alpha$, $45^0-\frac{3A}{4}=\beta$, находимъ

$$\frac{l_b-l_c}{h_b-h_c}=\frac{\cos(\alpha+2x)\cos(\beta+x)-\cos(\alpha-2x)\cos(\beta-x)}{\cos(\beta-x)\cos(\beta+x)\,[\cos(\alpha+2x)-\cos(\alpha-2x)]}.$$

Но

$$\cos(\alpha+2x)\cos(\beta+x)-\cos(\alpha-2x)\cos(\beta-x)=-2\sin x\,[2\sin(\alpha+\beta)\cos^2x-$$
$$-\cos\alpha\sin\beta];$$

$$\cos(\beta-x)\cos(\beta+x)=\cos^2x-\sin^2\beta;$$

$$\cos(\alpha+2x)-\cos(\alpha-2x)=-4\sin\alpha\sin x\cos x,$$

слѣдовательно

$$\frac{l_b-l_c}{h_b-h_c}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos^2x-\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha(\cos^3x-\sin^2\beta\cos x)}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ кубическое уравненіе для опредѣленія $\cos x$.

§ 11. **Второй случай.** *Отношеніе $k_1:k_2$ есть знакоперемѣнная функція относительно b и c или отличается отъ знакоперемѣнной функціи извѣстнымъ слагаемымъ.*

Допустимъ, что $\frac{k_1}{k_2}=q+\alpha$, гдѣ α постоянное извѣстное число (въ частности можетъ быть $\alpha=0$), а q функція отъ линейныхъ

элементовъ треугольника, измѣняющая знакъ, но не абсолютную величину при транспозиціи буквъ b и c. Въ этомъ случаѣ q^2 есть функція симметричная относительно b и c, и мы можемъ примѣнить теорію предыдущаго случая, исходя изъ выраженія q^2, причемъ однако получимъ уравненіе неэквивалентное требованіямъ задачи, ибо вмѣсто уравненія $f=q$, соотвѣтствующаго требованіямъ задачи, мы разсматриваемъ уравненіе $f^2=q^2$, которое содержитъ корни уравненія $f=-q$, чуждаго задачѣ. Отвѣтомъ на задачу будутъ только тѣ значенія B и C, которыя дѣлаютъ f равнымъ q, а не $-q$.

Можно было бы, исходя изъ уравненія $f=q$, исключить уголъ C подстановкой $C=180^0-(A+B)$ и затѣмъ получить уравненіе относительно $\operatorname{tg}\frac{B}{2p}$, гдѣ p прилично выбранная постоянная, пользуясь подстановками

$$\sin\frac{B}{p}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2p}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2p}}\,;\ \cos\frac{B}{p}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2h}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2p}}\,.$$

Но и въ этомъ случаѣ получимъ уравненіе гораздо болѣе высокой степени, чѣмъ число различныхъ рѣшеній задачи, ибо такая подстановка значительно повышаетъ степень уравненія. Рѣшеніями задачи будутъ только тѣ значенія $\operatorname{tg}\frac{B}{2p}$, которымъ соотвѣтствуютъ значенія B, содержащіяся между нулемъ и 180^0. Въ большинствѣ случаевъ наиболѣе выгоднымъ представляется слѣдующій путь:

Такъ какъ q есть знакоперемѣнная функція относительно b и c, то въ уравненіи $f=q$ функція f будетъ знакоперемѣнной относительно B и C. Полагая теперь

$$\varphi=\frac{f}{\sin\frac{B-C}{2p}},$$

(гдѣ p выбрано такъ, какъ это указано въ предыдущемъ параграфѣ), находимъ, что φ есть симметричная функція относительно угловъ B и C. Предполагая, что f есть раціональная функція отъ синусовъ и косинусовъ угловъ $\frac{B}{p}$ и $\frac{C}{p}$, найдемъ, какъ это показано было въ § 9, что φ есть раціональнаа функція отъ $\cos x$, гдѣ $x=\frac{B-C}{2p}\cdot$ Такимъ образомъ будемъ имѣть $f=\sin x.\varphi(\cos x)$ и уравненіе $f=q$ представится въ видѣ

$$\sin x\,.\,\varphi(\cos x)=q.$$

Что касается раціональной функціи φ, то ее можемъ представить въ видѣ

$$\varphi = \frac{f_1(\cos^2 x) + \cos x \,.\, f_2(\cos^2 x)}{\varphi_1(\cos^2 x + \cos x \varphi_2 (\cos^2 x)},$$

и наше уравненіе $f = q$ представится въ видѣ

$$\frac{f_1(\cos^2 x) + \cos x \,.\, f_2(\cos^2 x)}{\varphi_1(\cos^2 x) + \cos x\, \varphi_2(\cos^2 x)} \sin x = q. \qquad (A)$$

Разсмотримъ такіе случаи:

1. Если $f_2(\cos^2 x) = \varphi_2(\cos^2 x) = 0$, то будемъ имѣть раціональное уравненіе

$$\frac{f_1(1 - \sin^2 x)}{\varphi_1(1 - \sin^2 x)} \sin x = q$$

относительно $\sin x$.

2. Если $f_2(\cos^2 x) = \varphi_1(\cos^2 x) = 0$, то, принимая во вниманіе равенство $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, получимъ раціональное уравненіе

$$\frac{f_1\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)}{\varphi_2\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)} \operatorname{tg} x = q$$

относительно $\operatorname{tg} x$.

3. Если $f_1(\cos^2 x) = \varphi_2(\cos^2 x) = 0$; $f_2(\cos^2 x) = f_3[\cos^2 x(1 - \cos^2 x)]$; $\varphi_1(\cos^2 x) = \varphi_3[\cos^2 x(1 - \cos^2 x)]$, то будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{f_3\left[\frac{\sin^2(2x)}{4}\right]}{\varphi_3\left[\frac{\sin^2(2x)}{4}\right]} \cdot \frac{\sin(2x)}{2} = q,$$

раціональное относительно $\sin(2x)$.

4. Если $f_1(\cos^2 x) = \varphi_2(\cos^2 x) = 0$, но остальныя требованія предыдущаго пункта не выполняются, то, возвышая обѣ части уравненія (A) въ квадратѣ, получимъ уравненіе

$$\frac{\cos^2 x\, f_2{}^2(\cos^2 x)}{\varphi_1{}^2(\cos^2 x)} (1 - \cos^2 x) = q^2,$$

степень котораго обратно понизимъ вдвое, полагая $\cos^2 x = y$ или $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Во всякомъ случаѣ, возвышая обѣ части уравненія (A) въ квадратъ, получимъ раціональное уравненіе относительно $\cos x$, какъ это и должно быть согласно § 9, или же, прибѣгая къ подстановкамъ $\sin x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} : \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$; $\cos x = \left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) : \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$, ищемъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Такимъ образомъ устанавливаемъ слѣдующее

Правило четвертое. Если данъ уголъ A треугольника и величины двухъ однородныхъ функцій k_1 и k_2 отъ его линейныхъ элементовъ, причемъ $k_1 : k_2$ отличается извѣстнымъ числомъ отъ знакопеременной функціи относительно буквъ b и c, то, исходя изъ равенства $f = k_1 : k_2$ и полагая $\frac{B-C}{2p} = x$, гдѣ p прилично выбранная постоянная, слѣдуетъ искать одну изъ величинъ $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Замѣчаніе. Легко видѣть, что $(k_1-k_2):(k_1+k_2)$ будетъ знакоперемѣнной функціей отъ b и c, если при транспозиціи этихъ буквъ дробь $k_1 : k_2$ преобразуется въ $k_2 : k_1$. Это случится, напримѣръ, когда при перестановкѣ буквъ b и c функціи k_1 и k_2 перейдутъ соотвѣтственно въ k_2 и k_1 или въ $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$.

Въ этомъ случаѣ примѣняемъ правило четвертое, исходя изъ функціи $(k_1-k_2):(k_1+k_2)$.

Примѣры:

1. Даны: A, $r_b - r_c + h_b + h_c$ и $h'_b + h'_c$. Опредѣлить B и C. Такъ какъ $(h_b+h_c):(h'_b+h'_c) = \operatorname{tg}A\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, то отношеніе двухъ данныхъ функцій отъ линейныхъ элементовъ треугольника отличается извѣстнымъ слагаемымъ $\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ отъ знакоперемѣнной функціи $(r_b-r_c):(h'_b+h'_c)$ относительно b и c. Полагая $q = \frac{r_b-r_c+h_b-h_c}{h'_b+h'_c}$, имѣемъ

$$q - \operatorname{tg}A\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{r_b-r_c}{h'_b+h'_c} = \frac{p\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}{b\,\frac{\cos A\cos C}{\sin B} + c\,\frac{\cos A\cos B}{\sin C}} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)}{\cos A(\cos B + \cos C)} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\cos A}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2},$$

откуда опредѣляется $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ (§ 11, случай 2.).

2. Даны A, m_b и m_c. Ищутся углы B и C. Такъ какъ медіаны m_b и m_c не выражаются раціонально въ сторонахъ треугольника, то вмѣсто m_b и m_c будемъ считать данными $(2m_b)^2$ и $(2m_c)^2$. Эти функціи переходятъ одна въ другую при перемѣщеніи буквъ b и c, а потому пишемъ

$$q=\frac{(2m_b)^2-(2m_c)^2}{(2m_b)^2+(2m_c)^2}=\frac{3(b^2-c^2)}{4a^2+b^2+c^2}=\frac{3(\sin^2 B-\sin^2 C)}{4\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}.$$

Полагая

$B-C=x$ и, слѣдовательно, $B=90^0-\left(\frac{A}{2}-\frac{x}{2}\right)$; $C=90^0-\left(\frac{A}{2}+\frac{x}{2}\right)$,

находимъ

$$q=\frac{3\sin A\sin x}{4\sin^2 A+1+\cos A\cos x}$$

или

$$3\sin A\sin x-q\cos A\cos x=q(1+4\sin^2 A),$$

а потому, полагая

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{q\operatorname{tg}A}{3},\ \operatorname{tg}\psi=2\sin A$$

найдемъ

$$\sin(x-\varphi)=\sin(B-C-\varphi)=\frac{q\cos\varphi}{3\sin A\cos^2\psi}.$$

3. Даны: A, l_b-l_c и R. опредѣлить B и C. Здѣсь l_b-l_c есть знакоперемѣнная, а R симметричная функція отъ b и c.

Имѣемъ:

$$q=\frac{l_b-l_c}{R}=\frac{\dfrac{a\sin C}{\cos\dfrac{A-C}{2}}-\dfrac{a\sin B}{\cos\dfrac{A-B}{2}}}{\dfrac{a}{2\sin A}}=$$

$$=2\sin A\,\frac{\sin C\cos\dfrac{A-B}{2}-\sin B\cos\dfrac{A-C}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}}.$$

Полагая $\frac{B-C}{4}=x$, $\frac{A}{2}=\alpha$; $\frac{3A}{4}-45^0=\beta$, найдемъ, какъ и въ примѣрѣ параграфа 10,

$$q=4\sin A\,\frac{[2\sin(\beta-\alpha)\cos^2 x-\cos\alpha\sin\beta]\sin x}{\cos^2 x-\sin^2\beta}.$$

Замѣнивъ здѣсь $\cos^2 x$ черезъ $1-\sin^2 x$, получимъ кубическое уравненіе для опредѣленія $\sin x=\sin\frac{B-C}{4}$.

4. Даны: A, $\frac{Rr_b}{r_c}$ и $\frac{Rh_b}{h_c}$. Ищутся углы B и C. Такъ какъ здѣсь отношеніе $k_1 : k_2$, равное $(h_c r_b) : (h_b r_c)$, переходитъ въ $k_2 : k_1$ при транспозиціи буквъ b и c, то $(k_1 - k_2) : (k_1 + k_2)$ будетъ функціей знакоперемѣнной относительно b и c. Поэтому пишемъ

$$q = \frac{R\frac{r_b}{r_c} - R\frac{h_b}{h_c}}{R\frac{r_b}{r_c} + R\frac{h_b}{h_c}} = \frac{h_c r_b - h_b r_c}{h_c r_b + h_b r_c} = \frac{\sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\sin x}{1 - \sin\frac{A}{2}\cdot\cos x}$$

гдѣ $x = \frac{B - C}{2}$.

Полагая $\operatorname{tg}\varphi = q \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, находимъ

$$\operatorname{tg}(x + \varphi) = \operatorname{tg}\left(\frac{B - C}{2} + \varphi\right) = \frac{q\cos\varphi}{\cos\frac{A}{2}}.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Съѣздъ естествоиспытателей и врачей въ Аахенѣ. Отъ 17—21 (4—8) сентября въ Аахенѣ происходилъ 72-ой съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей, въ которомъ принимали участіе 150 мужчинъ и 250 женщинъ.—На первомъ общемъ засѣданіи 17-го сент. проф. Wüllner (Аахенъ) напомнилъ въ своей рѣчи, что 1847 годъ, когда точно также собрался въ Аахенѣ съѣздъ, ознаменовался для естествознанія и медицины двумя сообщеніями: 1) Гельмгольцъ опубликовалъ свою статью о сохраненіи энергіи, а 2) Вирховъ основалъ „Архивъ для паталогической анатоміи". Затѣмъ, послѣ обычныхъ привѣтствій, президентъ проф. von Laube (Вюрцбургъ)- какъ введеніе къ слѣдующимъ 4-мъ докладамъ, которые содержали обзоръ успѣховъ естествознанія и медицины въ 19-омъ вѣкѣ - вкратцѣ обрисовалъ то, что было сдѣлано за 3 предыдущихъ столѣтія. Первый докладъ прочелъ проф. van't Hoff (Берлинъ), задача котораго была описать развитіе точныхъ наукъ въ 19-омъ вѣкѣ*). Слѣдующихъ три доклада имѣли темой развитіе біологіи и медицины въ 19-омъ столѣтіи. На второмъ

---

*) Переводъ этой рѣчи мы помѣстимъ въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ „Вѣстника". *Ред.*

общемъ засѣданіи 21-го сентября, между прочимъ, проф. Erich v. Drygalski (Берлинъ) прочелъ докладъ о планѣ и задачахъ нѣмецкой южно-полярной экспедиціи. Послѣдняя, подъ предводительствомъ докладчика, предполагаетъ выѣхать лѣтомъ будущаго 1901-го года. Сначала она займется изслѣдованіемъ Южной Атлантики, а затѣмъ отправится отъ Капштадта къ Кергуэнамъ, гдѣ будетъ устроена станція; эта станція предназначается для постоянныхъ научныхъ наблюденій въ теченіе всего времени отъ декабря 1901 года до марта 1903. Установивъ станцію экспедиція направится дальше на югъ по направленію къ магнитному полюсу, и изслѣдуетъ не окружаетъ ли его материкъ или островъ. Надѣются въ удобномъ мѣстѣ устроить зимнюю станцію и затѣмъ въ продолженіи года производить наблюденія надъ маятникомъ, земнымъ магнитизмомъ, а также метеорологическія и біологическія. Съ началомъ антрактической весны начнутся путешествія на саняхъ съ цѣлью найти магнитный полюсъ и по возможности приблизится къ земному. Возвращеніе предполагается лѣтомъ 1903-го года, но можетъ оттянуться до марта 1904-го. Вмѣстѣ съ нѣмецкой будутъ работать англійская и шотландская экспедиціи; первая отправится съ юга Австраліи къ Землѣ Викторіи, а затѣмъ по направленію къ магнитному и земному полюсамъ, вторая— отъ Южной Америки къ Землѣ Грэхэма. Наконецъ, съ той же цѣлью проэктируется еще шведская экспедиція. — Слѣдующій съѣздъ назначенъ на будущій 1901-ый годъ въ Гамбургѣ. (Naturwissenschaftliche Rundschau).

Изслѣдованія силы тяготѣнія, произведенныя Poyting'омъ. „Naturwissenschaftliche Rundschau" сообщаетъ содержаніе доклада John H. Poyting'a въ Royal Jnstitution объ изслѣдованіяхъ силы тяготѣнія. Сначала докладчикъ изложилъ методы измѣренія силы тяготѣнія отъ Кавендиша до настоящаго времени, которыя всѣ приводятъ къ почти согласнымъ результатамъ. Затѣмъ онъ перешелъ къ интереснымъ опытамъ, имѣющимъ цѣлью подойти ближе къ сущности тяготѣнія, опытамъ, давшимъ пока, правда, только отрицательные результаты. Если сравнить силу тяготѣнія съ электрической и магнитной, то невольно напрашивается вопросъ: всегда ли силовыя линіи тяготѣнія прямолинейны, не предпочитаютъ ли онѣ, подобно электрическимъ и магнитнымъ, извѣстныя среды другимъ? Съ цѣлью отвѣтить на этотъ вопросъ Austi и Thwing помѣщали между притягивающимися тѣлами аппарата Boys'a экраны изъ всевозможныхъ матеріаловъ, но никакого замѣтнаго измѣненія силы притяженія не наблюдалось. Точно такіе же результаты дали опыты Mackenzie надъ известковымъ шпатомъ и Poyting'a и Gray надъ кварцемъ; послѣдніе изслѣдовали не зависитъ ли сила тяготѣнія отъ взаимнаго расположенія кристаллическихъ осей.

Воспроизведеніе X-лучей батарейнымъ токомъ. Какъ сообщаетъ „Naturwissenschaftliche Rundschau", I. Trowbridge'у удалось воспроизвести при помощи батарейнаго тока X-лучи. Онъ при-

мѣнялъ при этомъ 20000 клѣтокъ Планто. При помощи 40000 вольтъ этой батареи онъ получалъ, при введеніи въ цѣпь большого сопротивленія, постоянный токъ, который давалъ X-лучи очень большой интенсивности. Когда Рентгеновскую трубку помѣщали между полюсами батареи, то сначала не было замѣтно никакого тока; необходимо было нагрѣть трубку и она начинала флуоресцировать. Когда же антикатодъ свѣтился яркокраснымъ свѣтомъ, испускались X-лучи большой интенсивности. Если антикатодъ станетъ свѣтиться бѣлымъ свѣтомъ, то сопротивленіе трубки падаетъ и лучи ослабляются. Этотъ способъ добыванія X-лучей очень удобенъ, такъ какъ даетъ возможность регулировать токъ и разность потенціаловъ.

Воздушный полетъ въ Парижѣ Изъ Парижа были пущены 30 (17) сентября с. г. три воздушныхъ шара съ научною цѣлью. Всѣ три благополучно спустились на землю: первый въ Россіи (Привислянскій край), второй въ Германіи при Варбургѣ (Вестфалія) и третій послѣ 24-часового пути въ Помераніи.

Д. Шоръ (Геттингенъ).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Преміи Императорскаго Русскаго Техническаго Общества. Въ октябрской книжкѣ „Зап. Императорскаго Рус. Тех. Общ." указаны текущіе сроки на соисканіе двухъ премій, присужденіе которыхъ предоставлено названному обществу. Для преміи Товарищества нефт. производства Бр. Нобель этотъ срокъ истекаетъ 31-го сентября 1902 г., а для преміи М. И. Коли онъ истекаетъ 24 іюня 1904 г. Обѣ преміи выдаются за самостоятельное изслѣдованіе или изобрѣтеніе въ области техники, прикладной математики, физики или химіи. Срокъ на соисканіе медали А. П. Бородина уже истекъ; присужденіе состоится въ январѣ 1901 года.

XI съѣздъ естествоиспытателей и врачей Оффиціально объявлено о созывѣ XI съѣзда естествоиспытателей и врачей. Хотя на X съѣздѣ мѣстомъ XI съѣзда была избрана Варшава, но онъ соберется въ Петербургѣ въ концѣ декабря 1901 года. Предсѣдателемъ распорядительнаго комитета назначенъ проф. С. Н. Реформатскій.

Томскій Технологическій Институтъ. Опубликовано Высочайше утвержденное 12-го іюня 1900 г. положеніе о Томскомъ Технологическомъ Институтѣ. Институтъ раздѣляется на четыре отдѣленія: химическое, механическое, инженерно-строительное и горное.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 631. Внутреннія общія касательныя двухъ окружностей, лежащихъ въ одной плоскости, перпендикулярны. Доказать, что площадь треугольника, образованнаго тремя общими касательными, изъ которыхъ двѣ—внутреннія и одна внѣшняя, равна произведенію радіусовъ данныхъ окружностей.

П. Полушкинъ (Знаменка).

№ 632. На данной прямой L найти точку M такъ, чтобы уголъ AMB, подъ которымъ видѣнъ изъ нея данный отрѣзокъ AB другой прямой, былъ бы наибольшимъ.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ) и *Д. Шоръ* (Геттингенъ).

№ 633. Вексель учли за 4 мѣсяца до срока коммерческимъ учетомъ, причемъ число процентовъ было цѣлое. Если бы учли вексель математически, но такъ, чтобы величина учета не измѣнилась, то число процентовъ оказалось бы снова цѣлымъ. По сколько процентовъ могъ быть сдѣланъ коммерческій учетъ?

Е. Буницкій (Одесса).

№ 634. Рѣшить уравненіе

$$2^7\cos 48x.\cos 24x.\cos 12x.\cos 6x.\cos 3x.\sin x.\sin(60^0+x).\sin(60^0-x)=\cos 7x.$$

В. Раздарскій (Владикавказъ).

№ 635. Рѣшить въ раціональныхъ, а затѣмъ въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^2-y^2=y^3.$$

Х.

№ 636. Съ какой высоты долженъ упасть на землю кусокъ льда, температуры 0^0, чтобы онъ весь превратился въ воду той же температуры, если предположить, что вся теплота, образовавшаяся въ моментъ паденія, тратится на плавленіе?

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 502 (3 сер.). *Построить треугольникъ* ABC, *если даны: уголъ* A, *радіусъ вневписаннаго круга, соотвѣтствующаго сторонѣ* BC, *и ра-*

діусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, одна изъ вершинъ котораго есть A, *a двѣ другія суть основанія высотъ треугольника* ABC, *опущенныхъ изъ* B *и* C.

Пусть BB' и CC' суть высоты треугольника ABC, a, b, c— его стороны, A, B, C—его углы, r_a и r_a' данные радіусы внѣвписаннаго и вписаннаго круговъ, r—радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC. Тогда

$$AB' = c\cos A,\ AC' = b\cos A,$$

откуда видно, что треугольникъ $AB'C'$ подобенъ треугольнику ABC, причемъ

$$\frac{AB'}{c} = \frac{AC'}{b} = \frac{B'C'}{a} = \cos A,$$

слѣдовательно и

$$\frac{r'}{r} = \cos A\ (1).$$

Отсюда вытекаетъ построеніе. На одной изъ сторонъ даннаго угла A отложимъ отрѣзокъ $AD = r'$ и изъ точки D возставимъ перпендикуляръ AD къ прямой AD до пересѣчеиія его съ другой стороной угла A въ точкѣ E.

Тогда

$$AE = AD : \cos A\ \text{(см. (1))}.$$

Если построимъ двѣ прямыя, параллельныя сторонамъ угла A, пересѣкающіяся внутри этого угла и отстоящія отъ его сторонъ соотвѣтственно на разстояніи равномъ AE, затѣмъ изъ точки O встрѣчи этихъ прямыхъ опишемъ окружность радіусомъ AE, то окружность O есть вписанная въ искомый треугольникъ. Затѣмъ подобнымъ же образомъ вписываемъ въ уголъ A окружность O' даннаго радіуса r_a. Треугольникъ, отсѣкаемый отъ угла A внутренней общей касательной окружностей O и O' есть искомый.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 524 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + ckx^2 + bk^3x + ak^5 = 0.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$a(x^5+k^5)+bx(x^3+k^3)+cx^2(x+k)=(x+k)\,[ax^4+\alpha x^3+\beta x^2+k^2\alpha x+ak^4]=0,$$

гдѣ

$$\alpha = b - ak,\ \beta = c - bk + ak^2,$$

мы замѣчаемъ, что одинъ изъ корней предложеннаго уравненія равенъ $-k$, а остальные корни суть корни уравненія

$$ax^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + k^2\alpha x + ak^4 = 0.$$

Дѣля обѣ части уравненія на x^2, представимъ его въ видѣ

$$a\left(x^2+\frac{k^4}{x^2}\right)+\alpha\left(x+\frac{k^2}{x}\right)+\beta=0. \qquad (1)$$

Положимъ

$$x+\frac{k^2}{x}=y, \qquad (2)$$

откуда, возвышая въ квадратъ обѣ части равенства (2) и отнимая затѣмъ по $2k^2$ отъ обѣихъ частей, находимъ:

$$x^2+\frac{k^4}{x^2}=y^2-2k^2. \qquad (3)$$

На основаніи равенствъ (2) и (3) уравненіе (1) преобразуется въ квадратное:

$$a(y^2-2k^2)+\alpha y+\beta=0.$$

Подставивъ одинъ изъ корней послѣдняго уравненія въ уравненіе (2), находимъ два соотвѣтствующихъ значенія x изъ квадратнаго уравненія

$$x^2-yx+k^2=0.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону); *И. Поповскій* (Умань).

№ 530 (3 сер.). *Въ данный треугольникъ* ABC *вписать три равныхъ равностороннихъ треугольника:* MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2 *такъ, чтобы они имѣли общую вершину* M *внутри треугольника, а остальныя ихъ вершины лежали на сторонахъ треугольника:* A_2 *и* B_1 *на* AB, B_2 *и* C_1 *на* BC, C_2 *и* A_1 *на* CA. *Найти выраженіе для стороны этихъ треугольниковъ въ функціи сторонъ треугольника* ABC.

Предположимъ, что задача рѣшена. Изъ точки M, какъ изъ центра, опишемъ радіусомъ MA_1 окружность, которая пройдетъ и черезъ точки A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Тогда

$$\angle A_1MA_2=\angle B_1MB_2=\angle C_1MC_2=60^0,$$

а потому

$$\smile A_1A_2=\smile B_1B_2=\smile C_1C_2 \qquad (1).$$

Уголъ A измѣряется полуразностью дугъ $B_1B_2C_1C_2$ и A_1A_2, т. е. (см. (1)) половиною либо дуги $B_1B_2C_1$, либо дуги $B_2C_1C_2$. Поэтому

$$\angle B_1MC_1=\angle B_2MC_2=2\angle A.$$

Точно также убѣдимся, что

$$\angle C_1MA_1=\angle C_2MA_2=2\angle B,$$

$$\angle A_1MB_1=\angle A_2MB_2=2\angle C.$$

Пользуясь методомъ подобія, легко вписать требуемые равносторонніе треугольники въ треугольникъ ABC.

Изъ произвольной точки M' плоскости произвольнымъ ра-

діусомъ $M'A'_1$ описываемъ окружность, въ которой строимъ радіусы $M'B'_1$ и $M'C'_1$ такъ, что

$$\angle B'_1M'C'_1 = 2\angle A,\ \angle C'_1M'A'_1 = 2\angle B,\ \angle A'_1M'_1B'_1 = 2\angle C \quad (2).$$

Затѣмъ на окружности M' откладываемъ въ одномъ направленіи равныя радіусу хорды $A'_1A'_2$, $B'_1B'_2$, $C'_1C'_2$. Прямыя $C'_1B'_2$, $A'_1C'_2$, $B'_1A'_1$ пересѣкаясь даютъ треугольникъ, вершины котораго, соотвѣтственно противолежащія прямымъ $C'_1B'_2$, $A'_1C'_2$ и $B'_1A'_2$, мы назовемъ черезъ A', B', C'. Треугольникъ $A'B'C'$ подобенъ треугольнику ABC, что легко доказать на основаніи равенствъ (2). На радіусахъ $M'A'_1$, $M'A_2$, $M'B'_1$, $M'B'_2$, $M'C'_1$, $M'C'_2$ (или ихъ продолженіяхъ) строимъ соотвѣтственно точки A''_1, A''_2, B''_1, B''_2, C''_1, C''_2 такъ, что

$$\frac{M'A''_1}{M'A'_1} = \frac{M'A''_2}{M'A'_2} = \frac{M'B''_1}{M'B'_1} = \frac{M'B''_2}{M'B'_2} = \frac{M'C''_1}{M'C'_1} = \frac{M'C''_2}{M'C'_2} = \frac{AB}{A'B'} \quad (3).$$

Прямыя $C''_1B''_2$, $A''_1C''_2$, $B''_1A''_2$ образуютъ при пересѣченіи треугольникъ, вершины котораго, соотвѣтственно противолежащія прямымъ $C''_1B''_2$, $A''_1C''_2$ и $B''_1A''_2$, мы назовемъ черезъ A'', B'', C''. Такъ какъ треугольники $A''B''C''$ и $M'A''B''$ подобны соотвѣтственно треугольникамъ $A'B'C'$ и $M'A'B'$, то (см. (3))

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{B''C''}{B'C'} = \frac{A''C''}{A'C'} = \frac{M'A''_1}{M'A'_1} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'},$$

откуда

$$A''B'' = AB,\ B''C'' = BC,\ A''C'' = AC.$$

Поэтому треугольникъ $A''B''C''$ равенъ треугольнику ABC. Построивъ на сторонѣ AB даннаго треугольника треугольникъ AMB, равный треугольнику $A''B''C''$ и обращенный вершиной M внутрь треугольника ABC, находимъ искомую точку M; описавъ изъ этой точки окружность радіусомъ $M'A''_1$ находимъ въ пересѣченіи этой окружности со сторонами треугольника остальныя вершины искомыхъ равностороннихъ треугольнковъ.

Назовемъ сторону равностороннихъ треугольнnковъ черезъ x и изъ точки M опустимъ перпендикуляры $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ соотвѣтственно на стороны AB, BC, CA. Стороны даннаго треугольника, углы и площадь назовемъ соотвѣтственно черезъ a, b, c; A, B, C и S. Тогда

$$a.M\alpha + b.M\beta + c.M\gamma = 2S \quad (4).$$

Изъ равнобедреннаго треугольника MB_2C_1 находимъ:

$$M\alpha = MC_1\cos\angle\alpha MC_1 = x\cos\frac{\angle B_1MC_1 - \angle B_1MB_2}{2} = x\cos\frac{2A - 60^0}{2} =$$

$$= x\cos(A - 30^0).$$

Точно также найдемъ:

$$M\beta = x\cos(B - 30^0)$$

$$M\gamma = x\cos(C - 30^0).$$

Подставляя найденныя значенія для $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ въ уравненіе (4) и рѣшая его относительно x, получимъ:

$$x=\frac{2S}{\cos(A-30^0)+\cos(B-30^0)+\cos(C-30^0)}.$$

Пусть R—радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, и пусть l_a, l_b, l_c суть соотвѣтственно разстоянія центра круга описаннаго отъ сторонъ этого треугольника, взятыя со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, будетъ ли соотвѣтственно одинъ изъ угловъ A, B, C острымъ или тупымъ. Тогда

$$\cos(A-30^0)=\cos A\cos 30^0+\sin A\sin 30^0=\frac{\sqrt{3}\cos A}{2R}+\frac{1}{2}\sin A=$$
$$=\frac{l_a\sqrt{3}}{2R}+\frac{S}{bc}.$$

Точно также найдемъ:

$$\cos(B-30^0)=\frac{l_b\sqrt{3}}{R}+\frac{S}{ca},\ \cos(C-30^0)=\frac{l_c\sqrt{3}}{2R}+\frac{S}{ab}.$$

Слѣдовательно

$$a\cos(A-30^0)+b\cos(B-30^0)+c\cos(C-30^0)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2R}(al_a+bl_b+cl_c)+\frac{(a^2+b^2+c^2)S}{abc}=\frac{S\sqrt{3}}{R}+\frac{(a^2+b^2+c^2)S}{abc},$$

или, принимая во вниманіе, что

$$R=\frac{abc}{4S},$$

$$a\cos(A-30^0)+b\cos(B-30^0)+c\cos(C-30^0)=\frac{4\sqrt{3}\,.\,S^2+(a^2+b^2+c^2)S}{abc}.$$

Поэтому

$$x=\frac{2abc}{4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2}=$$

$$=\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону).

№ 533 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$ax^6+bx^5+cx^4-(ae^3+be^2+ce-3ake-2bk)x^3+ckx^2+bk^2x+ak^3=0.$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія на x^3, приводимъ его къ виду:

$$a\left(x^3+\frac{k^3}{x^3}\right)+b\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+c\left(x+\frac{k}{x}\right)-(ae^3+be^2+ce-3ake-2bk)=0.$$

Положимъ

$$x+\frac{k}{x}=y. \qquad (1).$$

Возвышая обѣ части этого равенства въ квадратъ и отнимая затѣмъ отъ обѣихъ частей по $2k$, найдемъ:

$$x^2+\frac{k^2}{x^2}=y^2-2k \qquad (2).$$

Перемножая равенства (1) и (2) почленно и вычитая изъ полученнаго результата почленно равенство (см. 1)

$$k\left(x+\frac{k}{x}\right)=ky,$$

найдемъ:

$$x^3+\frac{k^3}{x^3}=y^3-3ky \qquad (3).$$

Пользуясь равенствами (1), (2) и (3), приводимъ данное уравненіе къ виду:

$$a(y^3-3ky)+b(y^2-2k)+cy-(ae^3+be^2+ce-3ake-2bk)=0, \qquad (4)$$

или

$$a(y^3-e^3)+c(y^2-e^2)+(y-e)(c-3ak)=$$

$$=(y-e)[a(y^2+ey+e^2)+b(y+e)+c-3ak]=0.$$

Такимъ образомъ уравненіе (4) распадается на два

$$y-e=0,$$

$$a(y^2+ey+e^2)+b(y+e)+c-3ak=0.$$

Подставляя одно изъ трехъ значеній y, найденныхъ изъ этихъ уравненій, въ уравненіе (1), находимъ два соотвѣтствующихъ значенія x изъ квадратнаго уравненія:

$$x^2-yx+k=0.$$

И. Поповскій (Умань); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

№ 534 (3 сер.). *Заряжаютъ электричествомъ два взаимно касающіеся маятника длины l. Они отталкиваются, составляя каждый уголъ α съ вертикалью. Опредѣлить зарядъ x каждаго шарика, зная, что вѣсъ шарика* p *и принимая вѣсъ нити равнымъ нулю.*

Пусть A—точка привѣса маятника, B и C—центры шариковъ въ положеніи равновѣсія при отталкиваніи, AD—высота треугольника ABC. Тогда

$$AB=AC=l,\ \angle DBA=\angle DCA=\alpha.$$

На центръ B одного изъ шариковъ дѣйствуютъ двѣ силы: одна $BE = f$, отталкивающая шарикъ по продолженію отрѣзка CB, другая $p = BG$, параллельная AD. Для того, чтобы шарикъ оставался въ равновѣсіи, необходимо, чтобы направленіе діагонали BF прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ BE и BG, совпадало съ направленіемъ нити AB. Условіе это выражается равенствомъ:

$$\operatorname{tg} \angle GBD = \frac{GB}{BG} = \frac{f}{p} = \operatorname{tg} \angle DBC = \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$f = p \operatorname{tg} \alpha.$$

Называя черезъ x выраженный въ кулонахъ зарядъ каждаго изъ шариковъ, имѣемъ:

$$f = \frac{x^2}{CB^2} = \frac{x^2}{(2DB)^2} = \frac{x^2}{(2AB\sin\alpha)^2} = \frac{x^2}{(2l\sin\alpha)^2}.$$

Итакъ

$$\frac{x^2}{(2l\sin\alpha)^2} = p \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$x = 2l \sin\alpha \sqrt{p \operatorname{tg} \alpha}.$$

А. Варенцовъ (Шуя).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

H. Wild. *Über den Säcularen Gang der Jnclination und Jntensität des Erdmagnetismus in St.-Petersburg—Pawlowsk.* Изъ „Записокъ Имп. Акад. Наукъ". Томъ IX. № 7. С.-Петербургъ. 1900 г. 40 стр. 4°. Цѣна 1 р.

Кн. Б. Голицынъ. *О метеорологическихъ наблюденіяхъ на новой землѣ.* Изъ „Записокъ Им. Ак. Наукъ." Томъ IX. № 3. С.-Петербургъ. 1900 г. 163 стр. 4°. Цѣна 2 р. 80 к.

Вольфъ. Проф. Сорбонны, астрономъ Парижской обсерваторіи. *Космогоническія гипотезы.* Переводъ подъ редакціей д-ра философіи М. Филиппова. С.-Петербургъ. 1900. Цѣна 60 к.

А. П. Гольденбергъ. *Собраніе ариѳметическихъ упражненій для гимназій и реальныхъ училищъ.* Курсъ перваго класса. 1900 г. 80 стр. 8°. Цѣна 25 к.

Б. П. Вейнбергъ. Отчетъ о командировкѣ заграницу на вакаціонное время 1900 г. 310 стр. 8°.

B. Weinberg. Privat-Docent an der Un. Odessa. *Ueber die Wahrscheinlichkeit einer Fehlervertheilung.* Abdruck aus den Astr. № 3659. (Bd. 153—August. 1900.

В. Лермантовъ. Лаборантъ и Приватъ-Доцентъ по Физикѣ Императорскаго СПБ. Ун. *Курсъ примѣнимой Алгебры.* Систематическое изложеніе основныхъ пріемовъ элементарной алгебры, находящихъ примѣненіе въ техникѣ и наукахъ о природѣ, и обычныхъ дополнительныхъ статей. Для самообученія и школъ. Содержитъ матеріалъ 3, 4, 5 и 6 классовъ гимназій, 3, 4 и 5 классовъ реальныхъ училищъ и всего курса техническихъ училищъ, духовныхъ семинарій и женскихъ гимназій. С.-Петербургъ. 1900. 143 стр. 8°.

Н. Киммель. *Главнѣйшія сочиненія въ области инженерныхъ наукъ,* строительнаго искусства, желѣзнодорожнаго и фабричнаго дѣла, механической и химической технологіи, горнаго производства, морского дѣла какъ и ученія объ электричествѣ и его примѣненіи на русскомъ, нѣмецкомъ, французскомъ и англійскомъ языкахъ. Дополненіе: 1897—1900 г.г. 122 стр. 8⁰.

Antoni Grabowski. Polskie slownictur chemiczne. Rzecz przedstawiona w imieniu Chemików warszawskich pod obrady IX zjazdu lekarzy i przyrodników polskich w Krakovie przez Bronislawa Znatowicza. Warszawa. 1900.

Авторъ указываетъ на желательное упорядоченіе польской химической терминологіи, въ которой до сихъ поръ нѣтъ единства. Онъ излагаетъ и защищаетъ проэктъ измѣненія терминологіи, предложенный имъ на съѣздѣ польскихъ химиковъ въ Краковѣ.

B. Weinberg. *La fusion et la cristallisation d'aprés les recherches de M. G. Tammann.* Regigées en français par B. Weinberg, Privat-Docent de Physique à l'Université d'Odessa. Rapport présenté au Congrés international de Physique, réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de Physique Paris 1900. 15 стр. 8⁰.

Проф. Г. Г. Де-Метцъ. *Физическіе институты и мастерскія физическихъ приборовъ за границею.* Извлечено изъ журнала „Инженеръ" за 1899 г. Кіевъ. 1900 г. 66 стр. 8⁰.

П. М. Покровскій. *О раціональныхъ функціяхъ эллиптическаго образа.* Москва. 1900 г. 44 стр. 8⁰

Отчетъ Попечителя Кавказскаго Учебнаго Округа о состояніи учебныхъ заведеній за 1899 г. Тифлисъ. 1900 г. 619 стр. 8⁰.

Р. Лауэнштейнъ. *Курсъ сопротивленія матеріаловъ. (Ученіе о прочности сооруженій).* Элементарное учебное руководство для школъ и самообученія и пособіе для практическаго пользованія съ особымъ приложеніемъ, содержащимъ таблицы степеней, корней и окружностей и площадей круга. Переводъ съ 5-го нѣмецкаго изданія (1899 г.). Н. Гуровскаго и Н. Иванова подъ редакціей Преподавателя Николаевской Инженерной Академіи и Училища Инженера Ал. Саткевича. Съ 96 рисунками въ текстѣ. С.-Петербургъ. 1901 г. 166 стр. 8⁰. Цѣна 1 р. 50 к.

Проф Евгеній Бобровъ. Философія въ Россіи. Матеріалы, изслѣдованія и замѣтки. Казань. 1900. 672 стр. 8⁰.

М. Казанскаго. Значеніе бактеріологическаго способа распознаванія азіатской холеры. (Окончаніе). Листы съ 53 по 76. Казань. 1900. 1320 стр. 8⁰.

Ал. Смирновъ. Мессіанскія ожиданія и вѣрованія Іудеевъ около временъ Іисуса Христа. (Отъ Маккавейскихъ войнъ до разрушенія Іерусалима Римлянами). (Окончаніе). Листы съ 8 по 33-й. Казань. 1900. 522 стр. 8⁰.

Prof. Dr. Felix B Ahrens. Die Entwicklung der chemie im 19 Jahrhundert Vortrag gehalten im Humboltverein zu Breslau zur Jahrhundertwende. Stuttgart. 1900. 37 стр. 8⁰.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 11-го Ноября 1900 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.